

# SYLLABUS CONCORSO 39° CICLO

## SYLLABUS MECCANICA

### **CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE**

- Cinematica: Moti uniformi, uniformemente accelerati, circolari, moti vari
- I moti relativi

### **DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE**

- IL principio di relatività e principi di Newton
- Quantità di moto. Impulso.
- Reazione vincolari.
- Forze di attrito statico dinamico e viscoso
- Forze elastiche e moto armonico.
- Interazione gravitazionale e forza peso
- Forze apparenti.
- Lavoro e teorema dell'energia cinetica
- Forze conservative e conservazione dell'energia meccanica.

### **DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI**

- Centro di massa
- Equazioni Cardinali e conservazione della quantità di moto e del momento angolare.
- Teoremi di König, per l'energia cinetica e momento angolare
- Conservazione dell'energia per sistemi di punti materiali.
- Urti elastici ed anelastici

### **CORPI RIGIDI**

- Momento di inerzia e teorema di Huygens Steiner
- Equazioni della dinamica per rotazioni intorno ad assi fissi
- Moti di puro rotolamento
- Urti con corpi rigidi

## SYLLABUS ELETTROMAGNETISMO

### **ELETTROSTATICA** Legge di Coulomb.

- Teorema di Gauss, prima equazione di Maxwell.
- Potenziale elettrico, terza equazione di Maxwell, equazione di Poisson e di Laplace per il potenziale.
- Energia potenziale e densità di energia elettrostatica di una distribuzione di carica

### **CONDUTTORI E CAMPO ELETTROSTATICO**

- Proprietà dei conduttori: carica indotta, gabbia di Faraday , teorema di Coulomb per la densità di carica.
- Condensatori
- Energia elettrostatica di conduttori e condensatori.

### **ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI**

- Densità di polarizzazione. Densità volumetrica e superficiale di cariche di polarizzazione
- Spostamento elettrico. Prima equazione di Maxwell nei dielettrici.
- Energia elettrostatica in presenza di dielettrici.

- Legge di rifrazione delle linee di forza del campo elettrico alla superficie di separazione tra due dielettrici.

### **CORRENTE ELETTRICA STAZIONARIA**

- Intensità e densità di corrente.
- Equazione di continuità. Leggi di Ohm. Resistenza.
- Legge di Joule.
- Corrente quasi-stazionaria. Carica e scarica di un condensatore

### **MAGNETOSTATICA NEL VUOTO**

- Forza di Lorentz.
- Forza agente su un circuito percorso da corrente (seconda formula di Laplace).
- Legge di Biot-Savart (prima formula di Laplace).
- Proprietà del campo magnetico, definizione di potenziale vettore, seconda equazione di Maxwell.
- Quarta equazione di Maxwell e teorema della circuitazione di Ampere.

### **INDUZIONE MAGNETICA E CAMPI LENTAMENTE VARIABILI**

- Forza elettromotrice indotta, flusso tagliato e forza di Lorentz.
- Legge di Faraday-Neumann e legge di Lenz.
- Terza equazione di Maxwell.
- Induttanza. Energia del campo magnetico

## **SYLLABUS ELECTROMAGNETISM**

### **ELECTROSTATIC**

- Coulomb's law
- Electric field
- Gauss theorem and first Maxwell's equation.
- Scalar potential, third Maxwell's equation, Poisson and Laplace equations
- Electrostatic potential energy and energy density of a charge distribution

### **CONDUCTORS AND ELECTROSTATIC FIELD**

- Conductors: induced charge, Faraday's cage, Coulomb theorem for the surface charge
- Capacitors
- Electrostatic energy of conductors and capacitors

### **ELECTRIC FIELDS IN MATTER**

- Polarization, volume and surface density of bound charges.
- The electric displacement, first Maxwell's equation in linear dielectrics
- Electrostatic energy in linear dielectrics
- Interface between linear dielectrics

### **STEADY CURRENTS**

- Intensity and density of current
- Continuity equation. Ohm's laws. Resistance
- Joule heating.
- Slowly varying currents: charging and discharging a capacitor

### **MAGNETOSTATIC**

- Lorentz' forces

- Magnetic force on a current-carrying wire (second Laplace formula)
- Magnetic field from steady currents (Biot-Savart's law)
- Divergence and curl of  $\mathbf{B}$ , vector potential, second Maxwell's equation
- Fourth Maxwell's equation and Ampere's law.

### **MAGNETIC INDUCTION AND SLOWLY-VARYING FIELDS**

- Motional electromotive force and Lorentz force.
- Lenz's law and Faraday-Neumann's law.
- Third Maxwell's equation
- Inductance. Energy in magnetic fields.

## **SYLLABUS FOR NON-RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS**

- a) Fundamental concepts: kets, bras, operators, Hilbert space, basis, matrix representation, measurements, observables, and uncertainty relations, position, momentum, and translation, wave functions in position and momentum space.
- b) Quantum dynamics: time evolution, Schroedinger equation, Schroedinger and Heisenberg representation, harmonic oscillator, finite-depth and infinite-depth square well.
- c) Theory of angular momentum: rotations and angular momentum, commutation relations, spin 1/2 systems, eigenvalues and eigenstates of angular momentum, orbital angular momentum, addition of angular momenta and Clebsch-Gordan coefficients.
- d) Symmetry in quantum mechanics: conserved quantities, degeneracies. Discrete symmetries, parity (space inversion).
- e) Approximation methods. Time-independent perturbation theory (degenerate and nondegenerate case). Time-dependent perturbation theory.
- f) Identical particles, Pauli principle, fermions and bosons.

## **SYLLABUS DI MECCANICA STATISTICA**

### **Fondamenti della Meccanica Statistica Classica**

Spazio delle fasi, Postulato Fondamentale della Meccanica Statistica

### **Ensemble Microcanonico**

- Definizione di Entropia e regole di calcolo a energia costante
- Distribuzione di Maxwell-Boltzmann.
- Teorema di equipartizione e teorema del viriale.
- Entropia del gas perfetto.
- Paradosso di Gibbs e equazione di Sackur-Tetrode.

### **Ensemble Canonico**

- Distribuzione di Boltzmann e regole di calcolo a temperatura costante
- Funzione di partizione, Energia media, Energia libera di Helmholtz, calore specifico, potenziale chimico
- Gas perfetto di particelle libere.
- Equazione Barometrica nel gas perfetto.
- Gas perfetto di oscillatori armonici.
- Gas perfetto di particelle classiche relativistiche.
- Gas classico interagente, espansione del viriale.

**Ensemble a temperatura e pressione costante: Ensemble (T,p).**

- Definizione e regole di calcolo

**Ensemble Gran Canonico**

- Regole di calcolo per sistemi aperti a temperatura costante
- Fugacita', funzione gran canonica, gran potenziale

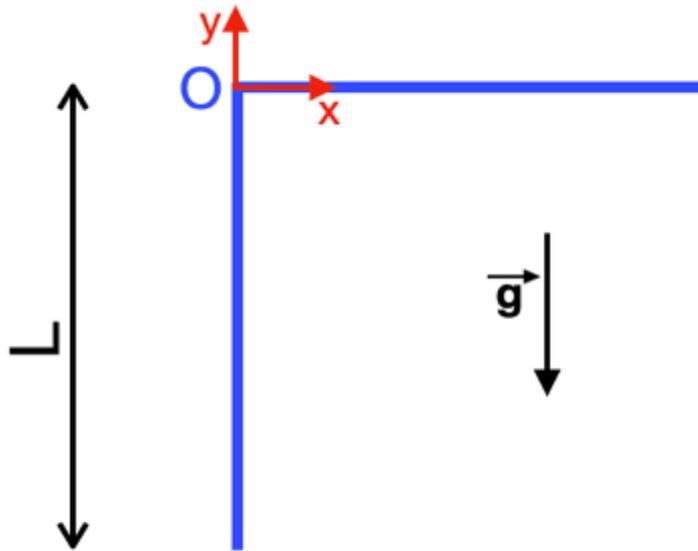
*ESEMPI DI ESERCIZI*

MECCANICA

*ESERCIZIO 1*

Una sbarra omogenea di lunghezza  $2L$  e massa  $M$  è piegata a  $90$  gradi nel suo centro  $O$ . La sbarra è vincolata a ruotare, senza attrito, intorno all'asse orizzontale passante per  $O$  e ortogonale al piano della figura. L'asta viene lasciata libera di ruotare, partendo da ferma, dalla posizione indicata in figura. Calcolare

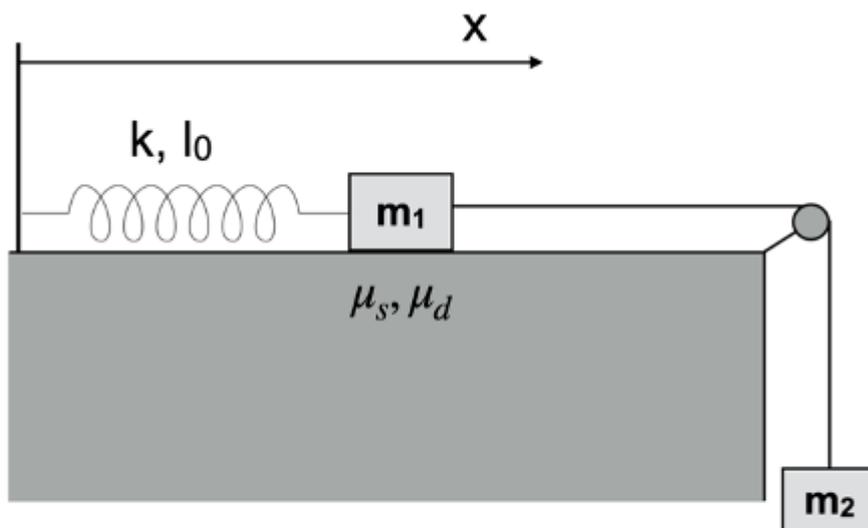
1. il momento di inerzia  $I$  rispetto ad un asse perpendicolare al piano della sbarra e passante per  $O$ ;
2. l'accelerazione angolare  $\alpha$  quando la sbarra comincia a ruotare;
3. la componente radiale  $R_r$  e tangenziale  $R_t$  della reazione vincolare quando la sbarra comincia a ruotare.



## ESERCIZIO 2

Una massa  $m_1$  è appoggiata su un piano scabro di coefficienti di attrito statico e dinamico pari a  $\mu_s$  e  $\mu_d$ , rispettivamente. Essa è collegata da un lato ad una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $l_0$  e dall'altro ad un filo inestensibile e di massa trascurabile. All'altro capo del filo è appesa una massa  $m_2$  tramite una carrucola di massa trascurabile come in figura. Calcolare:

1. la tensione del filo se il sistema è in quiete;
2. i valori della coordinata  $x$  della massa  $m_1$  per i quali il sistema può restare in quiete e la coordinata massima ( $x_{\max}$ ) possibile);
3. l'accelerazione iniziale quando la massa  $m_1$  viene portata nella posizione  $x' = 2x_{\max}$  e il sistema viene lasciato libero di muoversi partendo da fermo ;



## ELETTROMAGNETISMO

### ESERCIZIO 1 - EXERCICE 1

Una carica  $Q=2.0$  nC è posta su una sfera conduttrice di raggio  $R=20$  cm. Esternamente alla sfera e concentrico ad essa è posto un guscio sferico (raggi  $R_1 = 25$  cm e  $R_2 = 35$  cm) di materiale isolante omogeneo ed isotropo con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 3$ . Si determini:

1. Il potenziale della sfera (assumendo nullo il valore del potenziale all'infinito)
2. Le cariche di polarizzazione (volumetriche e superficiali) presenti nel dielettrico
3. Il lavoro necessario per portare una carica  $q = -0.4$  nC dalla distanza  $d=1.2$  m dal centro della sfera a distanza infinita da essa.

*A conducting sphere of radius  $R=20$  cm carries an electric charge  $Q=2.0$  nC. The sphere is embedded in a spherical shell (inner  $R_1 = 25$  cm and outer radius  $R_2 = 35$  cm, respectively) made of a linear homogeneous isotropic dielectric, of dielectric constant  $\epsilon_r = 3$ .*

1. *Compute the potential of the sphere (assuming zero potential at infinity)*
2. *Compute the (volume and surface) polarization charges in the dielectric*
3. *Compute the work done to bring a charge  $q = -0.4$  nC from the distance  $d=1.2$  m from the center of the sphere to infinity.*

### ESERCIZIO 2 - EXERCICE 2

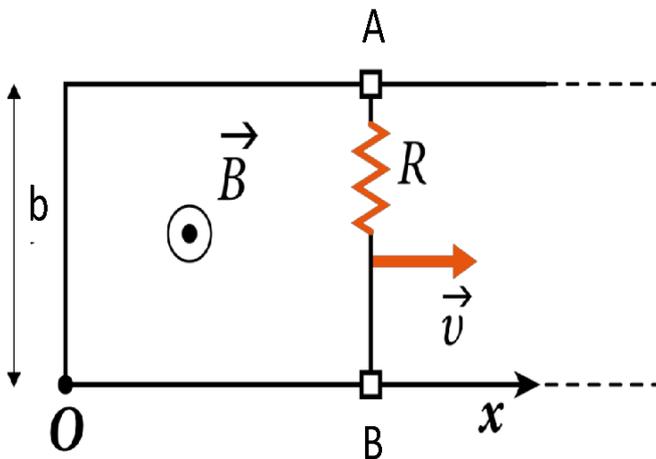
Una sbarretta metallica di lunghezza  $b = 4$  cm, massa  $m=3.0$  g e resistenza  $R=2.0$   $\Omega$  può scorrere senza attrito su una guida metallica di resistenza trascurabile. Il circuito formato dalla sbarretta e dalla guida è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme, perpendicolare al piano del

circuito, di modulo  $B=0.02$  T. Al tempo  $t=0$  la sbarretta viene messa in moto con velocità  $v_0 = 4$  cm/s. Si determini:

1. L'espressione della corrente che scorre nella sbarretta per  $t > 0$  e il suo valore numerico al tempo  $t=10$  s.
2. L'energia dissipata nella sbarretta per effetto Joule fino a  $t=10$  s.
3. La velocità asintotica della sbarretta per  $t \rightarrow \infty$

*A metal bar of mass  $m=3.0$  g and resistance  $R=2.0$   $\Omega$  slides frictionlessly on two parallel conducting rails at distance  $b = 4$  cm apart. A uniform magnetic field  $B=0.02$  T, pointing out of the page, fills the entire region. The bar starts out at  $t=0$  with speed  $v_0 = 4$  cm/s, and is left to slide.*

4. Evaluate the current induced in the circuit at  $t > 0$ , and compute its value at  $t=10$  s.
5. Compute the energy delivered in the resistor up to  $t=10$  s.
6. Compute the asymptotic value of the bar at  $t \rightarrow \infty$



## MECCANICA STATISTICA

### ESERCIZIO 1

Si consideri un gas costituito da  $N$  particelle identiche non interagenti confinate su un piano in una regione circolare di raggio  $R$ . Dato un sistema di riferimento con centro in tale regione, la Hamiltoniana di particella singola e' data da

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k q^2}{2} \quad \text{con} \quad |\vec{q}| = q; \quad |\vec{p}| = p$$

dove  $m$  e' la massa delle particelle, e  $k$  e' una costante reale positiva.

Assumendo che il sistema sia in equilibrio con un bagno termico a temperatura  $T$ :

- Calcolare l'energia interna e il calore specifico a volume costante del gas.
- Calcolare la frazione di particelle a distanza  $< R/2$  dall'origine.
- Discutere il limite  $K_B T \gg kR^2/2$ .

### ESERCIZIO 2

Si consideri un gas ideale di atomi di massa  $m$  contenuto in un cilindro di altezza infinita in presenza del campo gravitazionale terrestre.

- Qual è la distribuzione della densità al variare dell'altezza  $z$  ?
- Di quanto differisce l'energia media per particella alla base ed ad altezza  $H$  ?

# Esercizi MQ Dottorato

April 20, 2023

[Problem 1]

Consider a quantum harmonic oscillator in one spatial dimension  $x$ , described by the following Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \eta x^4$$

where  $m, \eta > 0$ . The term proportional to  $\eta$  is a small perturbation.

1. Consider first the unperturbed oscillator by setting  $\eta = 0$ . The fundamental eigenfunction is  $\psi_0(x) \propto e^{-\alpha x^2/2}$  with  $\alpha = m\omega/\hbar$ . Compute the corresponding eigenvalue  $E_0$  and the normalization of the eigenfunction.  
[Use  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)y^{2n} dy = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$  for any non-negative integer  $n$ ].
2. Using time-independent perturbation theory, compute the correction  $\Delta E$  to the unperturbed ground-state energy  $E_0$  to first order in the perturbation  $\eta$ .
3. Write the Lagrangian  $L$  associated to the above Hamiltonian.

[Problem 2]

A particle with spin  $1/2$  is in a quantum state with  $\langle \sigma_x \rangle = \sqrt{3}/2$  and  $\langle \sigma_z \rangle = -1/2$

1. Find  $\langle \sigma_y \rangle$ .
2. At  $t = 0$  the particle is immersed in a magnetic field  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Find the time  $t$  such that  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle$ , and the corresponding value.
3. Find and plot the probability that a measure of  $\sigma_x$  yields the value 1.