TEORIA DI HODGE E MATROIDI

CORRADO DE CONCINI

Dato un insieme di vettori non nulli in uno spazio vettoriale uno può considerare i sottoinsiemi linearmente indipendenti di tale insieme. La nozione di Matroide introdotta negli anni '30 da Whitney, rappresenta un' assiomatizzazione della nozione di indipendenza lineare.

Nel corso, dopo aver introdotto la definizione di una Matroide M, introdurrò alcune successioni finite di interi non negativi associate ad M quali quella dei valori assoluti dei coefficienti del polinomio caratteristico di M e del polinomio caratteristico ridotto e il vettore f di M.

Alcune congetture risalenti agli anni '70 e dovute a Rota, Welsh e altri asseriscono la log concavità di tali successioni (ricordo che una successione $s = (s_0, \dots, s_m)$ di numeri reali si dice log concava se per ogni $1 \le i \le m-1$, $s_i^2 \ge s_{i-1}s_{i+1}$).

Cercherò di spiegare la dimostrazione di tali congetture contenuta nel lavoro

Adiprasito, Karim; Huh, June; Katz, Eric *Hodge theory for combinatorial geometries.* Ann. of Math. (2) 188 (2018), no. 2, 381-452.

Questa dimostrazione è notevole in quanto si basa su un risultato sorprendente, ovvero che una certa $\mathbb{R}$-algebra graduata $A^*(M) = \oplus_{h=0}^r A^h(M)$ definito in modo combinatorio ha le seguenti proprietà

(1) $A^*(M)$ ha la dualità di Poincaré. Ovvero $\dim A^r(M) = 1$ e per ogni $q \le r/2$, l'applicazione
$$\pi : A^q(M) \to \hom(A^{r-q}(M), A^r(M))$$
definita da $\pi(a)(b) = ab$ è un isomorfismo.

(2) (Hard Lefschetz) Si può definire un cono convesso $\mathcal{H}_M \subset A^1(M)$ detto cono ampio, tale che se $\ell \in \mathcal{H}_M$, per ogni $q \le r/2$ l'applicazione.
$$\cdot \ell^{r-2q} : A^q(M) \to A^{r-q}(M)$$
definita moltiplicando per ℓ^{r-2q} è un isomorfismo.

(3) (relazioni di Hodge Riemann) Per ogni $q \le r/2$, posto $P^q \subset A^q(M)$ uguale al nucleo della moltiplicazione per ℓ^{r-2q+1}, la forma quadratica Q_ℓ^q definita da $(-1)^q Q_\ell^q(a) = a\ell^{r-2q}a$ è definita positiva su P^q (nel senso che il suo valore è un multiplo positivo di ℓ^r).

Queste sono proprietà della coomologia (pari) di una varietà proiettiva. La cosa sorprendente è che in questo caso esse vengono dimostrate per anelli che in generale non sono anelli di coomologia e apre misteriose prospettive.